УДК 517.977

А. А. Якименко
Белорусский государственный технологический университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИЕ РЕГУЛЯТОРЫ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В статье рассматривается задача стабилизации двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию. В общем случае для решения такой задачи используются регуляторы, содержащие интегральную часть. Однако предложенные в работе регуляторы, не содержащие интегральную часть, представляются более простыми для реализации. При решении задачи стабилизации рассматриваемой системы применяются дифференциально-разностные регуляторы, использующие компоненты вектора ее состояния в момент времени t и в конечном числе прошлых моментов времени, кратных запаздыванию. В регуляторах используются также и производные компонент вектора состояния системы в предыдущие моменты времени, кратные запаздыванию.

Рассмотрены четыре принципиально различных возможных случая для соотношения параметров исходной системы. В каждом из этих случаев коэффициенты разыскиваемых дифференциально-разностных регуляторов получены в явном виде как элементарные функции параметров исходной системы. Найденные в статье регуляторы обеспечивают замкнутой этими регуляторами исходной системе асимптотическую устойчивость нулевого решения. В статье даются строгие математические обоснования всем полученным результатам. Также во всех возможных случаях для замкнутой полученными регуляторами системы нейтрального типа выписаны разложенные на множители характеристические квазиполиномы.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, стабилизация, регуляторы, асимптотическая устойчивость, запаздывание.

A. A. Yakimenko
Belarusian State Technological University

DIFFERENTIAL-DIFFERENT STABILIZING REGULATORS FOR ONE NEUTRAL TYPE SYSTEM

In this paper we consider the problem of stabilization for two-dimensional stationary dynamic system with a retarded argument of neutral type with one input and one state delay. In general, to solve this problem, one should use the controls containing an integral part. However, the proposed regulators that do not contain an integral part, seem to be more simple to implement. In solving the problem of stabilization of the system difference-differential regulators are used, using the components of its state at time t and at a finite number of time past, multiple of delays. In regulators are also used the derivatives of the components of the state vector of the system in previous times, multiple of delays.

We consider four fundamentally different possible cases for the ratio of the parameters of the original system. In each of these cases the coefficients of differential-difference regulators being found are obtained explicitly as elementary functions of the parameters of the original system. Found in the paper regulators provide a closed source system asymptotic stability of the zero solution. The article provides rigorous mathematical justification of all the results. Also, in all possible cases, for a closed system of a neutral type factoring characteristic quasipolynomials are written.

Key words: neutral type systems, stabilization, regulators, asymptotic stability, lag, feedback control.

Введение. Задача стабилизации является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа решение задачи стабилизации значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и одним запаздыванием по состоянию:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + \\ + A_2 \dot{x}(t-h) + bu(t),\ t > 0, \quad (1)$$

где A_i, $i = 0,1,2$ – постоянные 2×2-матрицы; b – ненулевой 2-вектор; $h > 0$ – постоянное запаздывание. Не ограничивая общности, считаем $b' = [0,\ 1]$ («′» означает транспонирование).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00}x(t) + \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=1}^{M} q'_{ij}x^{(i)}(t - jh), \qquad (2)$$

где q_{00}, q_{ij} = 2-векторы;

$$x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \frac{d^i}{dt^i}x(t),\ \ x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Введем (2×2)-матрицы:

$$\mathrm{A}(\lambda) = A_0 + A_1e^{-\lambda h} + A_2\lambda e^{-\lambda h},$$

$$W(\lambda) = \left[\mathrm{A}(\lambda)b,\ \ b\right], \lambda \in \mathbb{C}.$$

Возможны следующие случаи.

1. Вырожденный случай:

$$\det W(\lambda) \equiv 0.$$

В этом случае матрица $\mathrm{A}(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\mathrm{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2\lambda e^{-\lambda h} & 0 \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ – квазиполиномы:

$$a_i(\lambda) = a_{i0} + a_{i1}e^{-\lambda h} + a_{i2}\lambda e^{-\lambda h}, \qquad (3)$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}; i = 1,2, j = 0,1,2.$

Из результата, полученного в работе [1], следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Стабилизация системы (1) регулятором вида (2) в случае 1 возможна тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

i) $\beta_0 < -|\beta_1|, |\beta_2| \le 1,$

ii) $\beta_1 < -|\beta_0|, |\beta_2| < 1, h < h^*,$

где

$$h^* = \sqrt{\frac{1 - \beta_2^2}{\beta_1^2 - \beta_0^2}} \cdot \arccos\left(\frac{\beta_0 - \beta_1\beta_2}{\beta_1 - \beta_0\beta_2}\right). \qquad (4)$$

В качестве стабилизирующего можно взять регулятор:

$$u(x) = -(a_{20} + 1)x_2(t) - a_{21}x_2(t - h) - a_{22}\dot{x}_2(t - h),$$

поскольку разложенный на множители характеристический квазиполином замкнутой этим регулятором системы (1) имеет вид

$$\left(\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2\lambda e^{-\lambda h} - \lambda\right)(\lambda + 1).$$

2. Строго циклический случай:

$$\det W(\lambda) \equiv c \ne 0 (c \in \mathbb{R}).$$

Матрица $\mathrm{A}(\lambda)$ в этом случае имеет следующий вид:

$$\mathrm{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2\lambda e^{-\lambda h} & c \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где $\beta_i, i = 0,1,2$ – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda)$, $j = 1,2$ – квазиполиномы вида (3).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что задачу стабилизации решает дифференциально-разностный регулятор:

$$\begin{aligned} u(x) = -\frac{1}{c}\Big(&\big(1 + \beta_0(\beta_0 + 1) + ca_{10}\big)x_1(t) + \\ &+ \big(\beta_1(\beta_0 + 1) + ca_{11}\big)x_1(t - h) + \\ &+ \big(\beta_1 + \beta_2(\beta_0 + 1) + ca_{12}\big)\dot{x}_1(t - h) + \\ &+ \beta_2\ddot{x}_1(t - h)\Big) - (\beta_0 + 1 + a_{20})x_2(t) - \\ &- a_{21}x_2(t - h) - a_{22}\dot{x}_2(t - h), \end{aligned}$$

так как характеристический квазиполином замкнутой этим регулятором системы (1) имеет вид: $\lambda^2 + \lambda + 1$.

3. Слабо циклический случай:

$$\det W(\lambda) = c\left(\gamma_0 + e^{-\lambda h}\right),\ (c \ne 0).$$

Матрица $\mathrm{A}(\lambda)$ в этом случае имеет следующий вид:

$$\mathrm{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda h} + \beta_2\lambda e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0 + e^{-\lambda h}\right) \\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

где β_i, $i = 0,1,2, \gamma_0$ – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda)$, $j = 1,2$ – квазиполиномы вида (3).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Система (1) стабилизируема регулятором вида (2) в случае 3 тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

i) $\beta_0 < -|\beta_1|, |\beta_2| \le 1,$

ii) $\beta_1 < -|\beta_0|, |\beta_2| < 1, h < h^*,$

где h^* определено в (4).

В качестве стабилизирующего можно взять регулятор:

$$\begin{aligned} u(x) = &-(a_{20} + 1)x_2(t) - \\ &- a_{21}x_2(t - h) - a_{22}\dot{x}_2(t - h), \end{aligned}$$

поскольку характеристический квазиполином замкнутой этим регулятором системы (1) имеет вид: $\left(\beta_0+\beta_1 e^{-\lambda h}+\beta_2\lambda e^{-\lambda h}-\lambda\right)(\lambda+1)$.

iii) $\beta_2\gamma_0+1=0,\ \beta_0\beta_2+\beta_1\neq 0$.

В этом случае регулятор имеет вид

$$u(x)=\frac{1}{c}\left(\frac{\beta_2^3}{\beta_0\beta_2+\beta_1}\dddot{x}_1(t-h)+\right.$$

$$+\ \beta_2\frac{2\beta_1\beta_2+\beta_2^2+\beta_0\beta_2^2}{\beta_0\beta_2+\beta_1}\ddot{x}_1(t-h)+$$

$$+\left(\beta_2\frac{2\beta_0\beta_1\beta_2+\beta_1^2+\beta_0\beta_2^2+2\beta_1\beta_2+\beta_2^2+\beta_0^2\beta_2^2}{\beta_0\beta_2+\beta_1}-a_{12}\right)\times$$

$$\times\dot{x}_1(t-h)+\left(\beta_2\frac{\beta_0\beta_1^2+\beta_0\beta_1\beta_2+\beta_0^2\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_2+\beta_1^2}{\beta_0\beta_2+\beta_1}-\right.$$

$$\left.-a_{11}\right)x_1(t-h)+\left(\left(1+\beta_0^2+\beta_0\right)\beta_2-a_{10}\right)\Big)x_1(t)+$$

$$+\frac{\beta_2^2}{\beta_0\beta_2+\beta_1}\ddot{x}_2(t-h)+\left(\frac{\beta_0\beta_2^2+\beta_2^2+\beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2+\beta_1}-a_{22}\right)\dot{x}_2(t-h)-$$

$$-\left(\beta_0+1+a_{10}\right)x_2(t)+$$

$$+\left(\frac{\beta_0\beta_1\beta_2+\beta_0\beta_2^2+\beta_0^2\beta_2^2+\beta_2^2+\beta_1\beta_2}{\beta_0\beta_2+\beta_1}-a_{21}\right)\times$$

$$\times x_2(t-h).$$

Характеристический квазиполином замкнутой этим регулятором системы (1) в данном случае имеет вид: $\lambda^2+\lambda+1$.

iv) $\beta_2\gamma_0+1\neq 0,\ \gamma_0+e^{-\xi h}=0,\ \xi=\dfrac{\beta_0-\beta_1\gamma_0}{1+\beta_2\gamma_0}<0$.

Регулятор можно представить следующим образом:

$$u(t)=-\frac{1}{c}\left(\left(\frac{\beta_0^2\beta_2+\beta_0(\beta_1+\beta_2)+\beta_1}{\beta_2\gamma_0+1}+a_{10}\right)x_1(t)+\right.$$

$$+\left(\frac{\beta_1(\beta_0\beta_2+\beta_1+\beta_2)}{\beta_2\gamma_0+1}+a_{11}\right)x_1(t-h)+$$

$$+\left(\frac{\beta_2(\beta_0\beta_2+2\beta_1+\beta_2)}{\beta_2\gamma_0+1}+a_{12}\right)\dot{x}_1(t-h)+$$

$$\left.+\frac{\beta_2^2}{\beta_2\gamma_0+1}\ddot{x}_1(t-h)\right)-$$

$$-\left(\frac{\beta_2}{\beta_2\gamma_0+1}+a_{22}\right)\dot{x}_2(t-h)-$$

$$-\left(\frac{\beta_0\beta_2\gamma_0+\beta_1\gamma_0+\beta_2\gamma_0+1}{\beta_2\gamma_0+1}+a_{20}\right)x_2(t)-$$

$$-\left(\frac{\beta_0\beta_2+\beta_1+\beta_2}{\beta_2\gamma_0+1}+a_{21}\right)x_2(t-h).$$

Характеристический квазиполином замкнутой этим регулятором системы (1) в данном случае имеет вид: $(\lambda+1)\big(\lambda-(\beta_0-\beta_1\gamma_0)/(1+$ $+\beta_2\gamma_0)\big)$.

4. Общий циклический случай:

$$\det W(\lambda)=c\left(\gamma_0+\gamma_1 e^{-\lambda h}+\lambda e^{-\lambda h}\right),\ (c\neq 0).$$

Матрицу $\mathrm{A}(\lambda)$ в случае 4 можно привести к следующему виду:

$$\mathrm{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\beta_0+\beta_1 e^{-\lambda h} & c\left(\gamma_0+\gamma_1 e^{-\lambda h}+\lambda e^{-\lambda h}\right)\\ a_1(\lambda) & a_2(\lambda)\end{bmatrix},$$

где β_i,γ_i $i=0,1$ – некоторые действительные числа; $a_j(\lambda)$, $j=1,2$ – квазиполиномы вида (3).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Система (1) стабилизируема регулятором вида (2) в случае 4 тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

i) $\beta_0<-|\beta_1|$,

ii) $\beta_1<-|\beta_0|,\ h<h^*$,

где h^* определен в (4) при $\beta_2=0$.

Стабилизирующий регулятор примет вид

$$u(x)=-(a_{20}+1)x_2(t)-$$

$$-a_{21}x_2(t-h)-a_{22}\dot{x}_2(t-h).$$

Характеристический квазиполином замкнутой этим регулятором системы (1) в данном случае имеет вид: $\left(\beta_0+\beta_1 e^{-\lambda h}-\lambda\right)(\lambda+1)$.

iii) $\gamma_1-\beta_0>0,\ \beta_1\gamma_0-\beta_0\gamma_1>0$.

Стабилизирующий регулятор примет вид

$$u(x)=-\frac{1}{c}\big((\beta_1+a_{10})x_1(t)+a_{11}x_1(t-h)+a_{12}\dot{x}_1(t-h)\big)-$$

$$-(\gamma_1+a_{20})x_2(t)-a_{21}x_2(t-h)-$$

$$-a_{22}\dot{x}_2(t-h).$$

Характеристический квазиполином замкнутой этим регулятором системы (1) в данном случае имеет вид: $\lambda^2+(\gamma_1-\beta_0)\lambda+$ $+\beta_1\gamma_0-\beta_0\gamma_1$.

Заключение. Таким образом, полученные дифференциальноразностные стабилизирующие регуляторы представляются более простыми для реализации, чем интегральные.

Литература

1. Якименко А. А. Предельное запаздывание в одном уравнении нейтрального типа // Труды БГТУ. 2014. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 19–21.

References

1. Yakimenka A. A. Limiting delay in one neutral-type equation. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2014, no. 6: Physical-mathematical sciences and informatics, pp. 19–21 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 11.03.2015